

## Roteiro de Cálculo de Incertezas Análise de Experimentos Virtuais

### 1. Introdução

A análise de um experimento de física exige a avaliação da confiabilidade dos valores medidos por meio dos instrumentos. Não é possível encontrar o valor exato de uma grandeza, uma vez que ele só pode ser medido com um instrumento, que sempre tem limitações. No entanto, muitas grandezas, tais como a carga do elétron e a constante universal dos gases, têm um valor bem determinado, que chamaremos aqui de *valor verdadeiro*. Assim, numa medida, obtemos um valor *próximo* ao *valor verdadeiro*. Embora seja impossível determinar a diferença entre o valor medido e o valor verdadeiro, uma vez que este último é desconhecido, podemos definir grandezas que reflitam esta diferença de alguma forma, as chamadas **incertezas**, relacionadas diretamente com o conceito de **precisão**, que é tanto maior na medida quanto menor for a incerteza a ela associada. Infelizmente, não podemos quantificar a incerteza simplesmente pela média da diferença entre o valor medido e o verdadeiro, porque a diferença, que pode ser tanto positiva quanto negativa, tem valor médio nulo, nada informativo. Isso nos obriga a recorrer a elaborações matemáticas mais complexas.

A física faz uso das teorias da probabilidade e estatística na representação de suas medidas. Para a grande maioria dos experimentos, a forma de expressão do valor de uma grandeza  $x$  se fará por meio da média dos valores mensurados num conjunto de  $N$  medidas dela, isto é,  $\{x_i \mid i = 1, 2, \dots, N\}$ . O valor médio da grandeza  $x$  é dado por:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (1.1)$$

O valor da incerteza associada às medições da grandeza  $x$ , por sua vez, pode ser tomado a partir da *variância* ( $\sigma^2$ ) do conjunto das  $N$  medidas:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \quad (1.2)$$

Note que a variância não tem a mesma dimensão física que a grandeza ( $[\sigma_x^2] = [x]^2 \neq [x]$ ), de modo que a incerteza associada à medida da grandeza  $x$  é definida pelo *desvio-padrão* do conjunto das  $N$  medidas:

$$\sigma = \sqrt{\sigma_x^2} \quad (1.3)$$

O desvio-padrão  $\sigma$  é, portanto, uma grandeza definida positiva por consequência da operação de radiciação, e representa a incerteza relacionada a *cada um* dos dados, ou seja, avalia a distância entre cada medida e o valor verdadeiro. Considerando que a média foi calculada sobre  $N$  medições, a representação padrão da grandeza  $x$  é dada por:

$$x = \bar{x} \pm \sigma_x \quad (1.4)$$

Onde a incerteza do valor médio é descrita pela Equação 1.5, pelo chamado *desvio-padrão da média*  $\sigma_x$ ,

$$\sigma_x = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad (1.5)$$

A interpretação da Equação 1.4 nos fornece a conclusão preliminar de que é mais provável que o valor verdadeiro da grandeza  $x$  esteja no intervalo  $[\bar{x} - \sigma_x, \bar{x} + \sigma_x]$  que fora dele. Note que, quando efetuamos uma única medida, o desvio-padrão da média e o desvio-padrão do conjunto dos  $N$  dados da medida são idênticos (pois  $\sqrt{N} = 1$ ).

A melhor forma de descobrir a incerteza de uma medição é repeti-la muitas vezes com instrumentos diferentes e determinar a variância pelo valor quadrático médio das diferenças dos dados com a média deles. No entanto, muitas vezes isso é praticamente impossível, em particular no caso das medições com instrumentos graduados, por exemplo, na medição do comprimento com uma régua milimetrada – onde conseguir muitas réguas de *fabricantes* diferentes? Nesses casos, costuma-se estimar o valor do desvio-padrão como a metade da menor divisão que se consegue ler na escala. Assim, quando se usa uma régua graduada em **milímetros**, a precisão do instrumento é aproximadamente de  $0,5 \text{ mm}$ . Se a leitura da régua for  $7,8 \text{ cm}$ , o resultado deve ser representado como  $7,80 \pm 0,05 \text{ cm}$ , significando que o valor verdadeiro do comprimento do objeto provavelmente se encontra entre  $7,75 \text{ cm}$  e  $7,85 \text{ cm}$ .

Nos experimentos virtuais, com frequência leremos os valores das grandezas na escala de um instrumento, como no caso da *posição* do corpo (medida com uma trena) e o *instante* em que o corpo foi filmado em tal posição (definido pelo cronômetro da filmadora, estampado no *time code*). Há outras grandezas, entretanto, cuja medição não pode ser direta, como é o caso da *velocidade* de um carrinho ao longo de uma trajetória, uma vez que não possuímos uma “régua de velocidades”. Podemos, porém, calculá-la a partir das grandezas que a definem (posição e tempo).

O objetivo deste guia é orientá-lo e ajudá-lo a compreender o modo pelo qual as incertezas foram calculadas em cada experimento virtual, detalhando os passos e as aproximações usadas. Na seção 3, classificaremos as aplicações que ocorrem repetidamente e apresentamos as fórmulas genéricas deduzidas a partir da aplicação às situações que aparecem nos experimentos. A seção 4 apresenta alguns casos particulares, enquanto que na seção 2 que desenvolveremos a teoria geral da propagação de incertezas, de uma maneira suficiente para as análises apresentadas aqui.

## 2. Propagação de incertezas

A medida da velocidade  $v$  de um móvel é realizada indiretamente por meio de medidas de posição,  $x_2$  e  $x_1$ , e tempo,  $t_2$  e  $t_1$ , de acordo com a Equação 2.1:

$$v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \quad (2.1)$$

A incerteza da velocidade depende das incertezas das grandezas medidas diretamente, ou seja, das incertezas das posições e de seus respectivos instantes. Essa situação, da incerteza de uma grandeza deduzida ser proveniente das incertezas das grandezas das quais ela depende, é tão comum que vamos escrever a fórmula genérica que estabelece essa relação, para facilitar a adaptação a outros casos.

Seja  $f$  uma grandeza dependente de outras grandezas  $a, b, \dots, z$ , independentes entre si. Assim,  $f$  pode ser representada como sendo uma função de várias variáveis:  $f = f(a, b, \dots, z)$ . Em nosso exemplo,  $f$  é a velocidade, enquanto que  $a, b, c$  e  $d$  são  $x_2, x_1, t_2$  e  $t_1$ , respectivamente.

A incerteza em  $f$  é dada pela **fórmula de propagação de incertezas**, enunciada da seguinte maneira: o desvio-padrão de  $f$ ,  $\sigma_f$ , é a raiz quadrada da variância de  $f$ , calculada como

$$\sigma_f^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)^2 \sigma_b^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \sigma_z^2 \quad (2.2)$$

Onde  $\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial f}{\partial a} \Big|_{\substack{a=\bar{a} \\ b=\bar{b} \\ \dots \\ z=\bar{z}}}$  é a derivada parcial de  $f$  com respeito a  $a$  calculada no ponto  $(\bar{a}, \bar{b}, \dots, \bar{z})$ ,

analogamente para  $\frac{\partial f}{\partial b}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z}$ .

O símbolo  $\frac{\partial f}{\partial a}$  representa a derivada parcial de  $f$  em relação a  $a$ , ou seja, a derivada da função  $f$  quando apenas  $a$  é tomada como variável, e  $b, c, \dots, z$  são consideradas constantes. Por exemplo, consideremos uma função  $f = f(a, b)$  definida por:

$$f(a, b) = a^3 b^2 + 5a + 7b$$

As derivadas parciais da função  $f$  são então:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial a} = 2ab^3 + 5 \\ \frac{\partial f}{\partial b} = 3a^2 b^2 + 7 \end{cases}$$

Assim, as derivadas parciais calculadas no ponto  $(\bar{a}, \bar{b})$  são:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \bar{a}} = 2\bar{a}\bar{b}^3 + 5 \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{b}} = 3\bar{a}^2\bar{b}^2 + 7 \end{cases}$$

É importante lembrar que, por definição,  $\sigma_f, \sigma_a, \sigma_b, \dots, \sigma_z$  são valores positivos, obtidos como a raiz quadrada da variância da variável correspondente. Não podemos tratar os desvios-padrão como médias, por exemplo, onde a média da soma é a soma das médias. Nunca se somam ou subtraem desvios padrões, apesar de as variâncias serem aditivas.

### Condições de Validade

Esta fórmula tem validade geral, não só nos casos particulares que detalharemos abaixo, desde que duas condições sejam obedecidas:

- i) As variáveis do conjunto  $(\bar{a}, \bar{b}, \dots, \bar{z})$  são estatisticamente independentes. Isso significa que nenhuma das variáveis pode ser calculada a partir de uma ou algumas das variáveis do conjunto  $(\bar{a}, \bar{b}, \dots, \bar{z})$  nem sua medição interfere na medição de outra. Se isso acontecer, é necessário expandir suas fórmulas na expressão de  $f$  antes de aplicar a fórmula de propagação. O que acontece é que cada termo da Equação (2.2) precisa representar toda a dependência da função com relação à variável sobre a qual se calculou a derivada parcial; não pode haver dependências subjacentes nas outras variáveis. Note que se alguma das grandezas  $(\bar{a}, \bar{b}, \dots, \bar{z})$  for medida diretamente a partir de outras grandezas que não estejam nesse conjunto, podemos aplicar a fórmula de propagação de incertezas isoladamente a elas e usar as variâncias calculadas na fórmula de propagação.
- ii) Para cada grandeza  $x$ , precisamos que valha a desigualdade  $\sigma_x \ll \bar{x}$ . Em muitas das fórmulas de propagação que veremos, as variáveis aparecem no denominador, o que causa problemas se a variável puder ser nula, uma vez que seu inverso não estará definido. Mesmo que  $\bar{x}$  não seja nulo, quando  $\sigma_x \approx \bar{x}$ , há probabilidade de uma dada observação de  $x$  dar resultado nulo. A Equação (2.2) para propagação de incertezas supõe que as observações possam ser repetidas infinitas vezes; o resultado nada mais é do que o valor esperado para a média de infinitas observações, assim nunca poderemos recorrer a um valor indefinido ao utilizar a equação.

### Uma Interpretação Importante

Vamos destrinchar um pouco mais a Equação (1.2) e chegar a alguns resultados importantes para as futuras análises dos experimentos. Se  $x$  é a medida de uma **variável aleatória** (ou seja, uma grandeza tal que o resultado experimental é diferente a cada realização da medição), teremos, pela Equação 1.2:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$$

Efetando o produto notável interior ao somatório:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2)$$

Abrindo as adições envolvidas no somatório:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N-1} [(x_1^2 - 2x_1\bar{x} + \bar{x}^2) + (x_2^2 - 2x_2\bar{x} + \bar{x}^2) + \dots + (x_N^2 - 2x_N\bar{x} + \bar{x}^2)]$$

Pelas propriedades comutativa e associativa da soma, podemos reescrever a expressão:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N-1} [(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2) - (2x_1\bar{x} + 2x_2\bar{x} + \dots + 2x_N\bar{x}) + (\bar{x}^2 + \bar{x}^2 + \dots + \bar{x}^2)]$$

Note que o terceiro conjunto de parcelas corresponde a somarmos  $N$  vezes o quadrado do valor médio de  $x$ . No segundo conjunto de parcelas  $2\bar{x}$  é fator comum; podemos, portanto, pela propriedade distributiva da soma, reescrever a expressão acima por meio de outros somatórios:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N-1} \left( \sum_{i=1}^N x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^N x_i + N\bar{x}^2 \right)$$

Além disso, pela Equação (1.1), temos a seguinte identidade:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^N x_i = N\bar{x}$$

Podemos recorrer a esta relação no segundo somatório:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N-1} \left( \sum_{i=1}^N x_i^2 - 2N\bar{x}^2 + N\bar{x}^2 \right) = \frac{1}{N-1} \left( \sum_{i=1}^N x_i^2 - N\bar{x}^2 \right)$$

O somatório restante consiste no valor médio da grandeza  $x^2$ :

$$\bar{x^2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 \quad \Rightarrow \quad N\bar{x^2} = \sum_{i=1}^N x_i^2$$

Logo, a variância de  $x$  é:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N-1} (N\bar{x^2} - N\bar{x}^2) = \frac{N}{N-1} (\bar{x^2} - \bar{x}^2) \quad (2.3)$$

Quando o número  $N$  de dados é muito grande, podemos aproximar  $\frac{N}{N-1} = 1$ , e assim:

$$\sigma_x^2 \cong (\bar{x^2} - \bar{x}^2)$$

Quando a média da variável  $x$  for nula, teremos:

$$\sigma_x^2 \cong \bar{x^2} \quad (2.4)$$

Usaremos o resultado acima na estimativa da incerteza das **Energias Cinética e Potencial Elástica**.

### 3. Aplicações Comuns

#### 3.1 Soma ou Subtração

Vemos com relativa frequência medidas de grandezas baseadas na **variação** (que é entendida como uma subtração) de outras grandezas, como é o caso da velocidade ( $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ ), razão entre as variações de posição e tempo. Aplicando-se a fórmula de propagação de incertezas para o deslocamento  $\Delta x(x, x_0) = x - x_0$ , teremos, tomando-se  $\Delta x$  como certa função  $A$ ,  $\Delta x = A$ :

$$\Delta x(x, x_0) = A(x, x_0) = x - x_0 \Rightarrow \sigma_A^2 = \left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial x_0}\right)^2 \sigma_{x_0}^2 \quad (3.1.1)$$

Calculando-se as derivadas, teremos  $\frac{\partial A}{\partial x} = 1$  e  $\frac{\partial A}{\partial x_0} = -1$ . Substituindo estes resultados em (3.1), teremos:

$$\sigma_A^2 = \sigma_x^2 + \sigma_{x_0}^2 \quad (3.1.2)$$

Como  $\sigma_x = \sigma_{x_0}$  (pois as duas incertezas são relativas a distâncias, e estamos supondo tais medições feitas a partir de um mesmo instrumento de medida), temos que  $\sigma_A^2 = 2\sigma_x^2 \Rightarrow \sigma_A = \sigma_x\sqrt{2}$ . Portanto,

$$\sigma_{\Delta x} = \sigma_x\sqrt{2} \quad (3.1.3)$$

A incerteza no intervalo de tempo pode ser calculada de maneira análoga, logo:

$$\sigma_{\Delta t} = \sigma_t\sqrt{2} \quad (3.1.4)$$

As fórmulas de incerteza (3.3) e (3.4) são usadas nos cálculos de incerteza da **velocidade** dos corpos, nos experimentos de Trilho de Ar, Atrito, Colisões, Conservação de Energia e Dinâmica de Rotações. A relação (3.2) pode ser generalizada para um número qualquer de variáveis. Seja  $f$  uma função dada por  $f = a \pm b \pm \dots \pm z$ . Assim, sua variância pode ser expressa como:

$$\sigma_f^2 = \sigma_a^2 + \sigma_b^2 + \dots + \sigma_z^2$$

E a incerteza no valor da função será:

$$\sigma_f = \sqrt{\sigma_f^2} \quad (3.1.5)$$

Note que sempre tomamos  $\sigma_f$  como a raiz positiva da variância, pois, por definição, o desvio-padrão tem um valor positivo.

### 3.2 Produto ou Razão

Aplicando-se a fórmula de propagação de incertezas à quantidade de movimento linear  $p=mv$ , onde  $m$  é a massa e  $v$  é a velocidade do corpo ou partícula em estudo, teremos:

$$p(m, v) = mv \Rightarrow \sigma_p^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial m}\right)^2 \sigma_m^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)^2 \sigma_v^2 \quad (3.2.1)$$

Calculando as derivadas, teremos  $\frac{\partial p}{\partial m} = v$  e  $\frac{\partial p}{\partial v} = m$ . Aplicando as derivadas em (3.2.1), obtemos:

$$\sigma_p^2 = v^2 \sigma_m^2 + m^2 \sigma_v^2 \quad (3.2.2)$$

Como  $p=mv$ , podemos proceder com passos algébricos de modo a simplificar (3.2.2):

$$\sigma_p^2 = v^2 \sigma_m^2 + m^2 \sigma_v^2 = \left(\frac{mv}{m}\right)^2 \sigma_m^2 + \left(\frac{mv}{v}\right)^2 \sigma_v^2 = p^2 \left[ \left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_v}{v}\right)^2 \right] \quad (3.2.3)$$

Na situação especial em que a incerteza da massa puder ser desconsiderada, teremos  $\sigma_m \approx 0$ , de modo que a variância reduz-se a:

$$\sigma_p^2 = p^2 \left(\frac{\sigma_v}{v}\right)^2 \Rightarrow \sigma_p = p \frac{\sigma_v}{v} \quad (3.2.4)$$

Tais valores de incertezas são utilizados nos cálculos de **quantidade de movimento (momento linear)** dos corpos, no experimento de Colisões.

No caso geral, para uma função  $f$  dada por  $f = ab$  ou  $f = a/b$ , a incerteza do valor da função reduz-se a:

$$\sigma_f^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)^2 \sigma_b^2 \Rightarrow \sigma_f = f \sqrt{\left(\frac{\sigma_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_b}{b}\right)^2} \quad (3.2.5)$$

### 3.3 Razão das diferenças

Para calcular a incerteza associada à velocidade de um corpo, primeiro agruparemos as medidas de posição e tempo em duas funções,  $\Delta x = A$  e  $\Delta t = B$ , e aplicaremos a fórmula de propagação de incertezas (2.2), depois substituiremos as incertezas de  $A$  e  $B$ . Assim, temos:

$$v(\Delta x, \Delta t) = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{A}{B} \Rightarrow \sigma_v^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial A}\right)^2 \sigma_A^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial B}\right)^2 \sigma_B^2$$

Calculando as derivadas, teremos  $\frac{\partial v}{\partial A} = \frac{1}{B}$  e  $\frac{\partial v}{\partial B} = -\frac{A}{B^2}$ . Logo,

$$\sigma_v^2 = \left(\frac{1}{B}\right)^2 \sigma_A^2 + \left(-\frac{A}{B^2}\right)^2 \sigma_B^2 = \frac{1}{B^2} \left( \sigma_A^2 + \frac{A^2}{B^2} \sigma_B^2 \right)$$

Lembrando que  $A = \Delta x$  e  $B = \Delta t$ , e usando (3.1.3) e (3.1.4) na expressão acima, teremos:

$$\sigma_v^2 = \frac{1}{B^2} \left( \sigma_A^2 + \frac{A^2}{B^2} \sigma_B^2 \right) = \frac{1}{\Delta t^2} \left( (\sigma_x \sqrt{2})^2 + \frac{\Delta x^2}{\Delta t^2} (\sigma_t \sqrt{2})^2 \right) = \frac{2}{\Delta t^2} (\sigma_x^2 + v^2 \sigma_t^2)$$

Extraindo a raiz quadrada, teremos, portanto:

$$\sigma_v = \frac{\sqrt{2}}{\Delta t} \sqrt{\sigma_x^2 + v^2 \sigma_t^2} \quad (3.3.1)$$

Na situação dos experimentos virtuais, em que a incerteza do tempo pode ser desconsiderada, teremos  $\sigma_t \approx 0$  e a expressão acima se reduz a:

$$\sigma_v = \frac{\sqrt{2}}{\Delta t} \sigma_x \quad (3.3.2)$$

A expressão (3.3.2) é a fórmula aplicada nas incertezas da **velocidade** dos corpos nos experimentos de Trilho de Ar, Atrito, Colisões, Conservação de Energia e Dinâmica de Rotações.

De um modo geral, para uma função  $f$ , dada por  $f = \frac{\Delta a}{\Delta b}$ , podemos aplicar o raciocínio desenvolvido até aqui de maneira generalizada e representar a incerteza da função  $f$ , de acordo com (3.2.5), como sendo decorrente das incertezas em  $a$  e  $b$ :

$$\frac{\sigma_f}{f} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\Delta a}}{\Delta a}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\Delta b}}{\Delta b}\right)^2} \quad (3.3.3)$$



## 4. Aplicações Aos Experimentos

### 4.1 Energia Cinética

A energia cinética  $K$  de um corpo na mecânica clássica pode ser calculada a partir de sua massa  $m$  e de sua velocidade  $v$ :

$$K(m, v) = \frac{mv^2}{2}$$

Pela expressão (2.2) de propagação de incertezas, as derivadas parciais da energia cinética em relação à massa e à velocidade são  $\frac{\partial K}{\partial m} = \frac{v^2}{2}$  e  $\frac{\partial K}{\partial v} = \frac{2mv}{2} = mv$ . Após as devidas simplificações, obtemos:

$$\sigma_K^2 = \left(\frac{v^2}{2}\right)^2 \sigma_m^2 + (mv)^2 \sigma_v^2 \quad (4.1.1)$$

Esta expressão pode ser modificada algebricamente de modo a obter a aparência da fórmula geral para funções do tipo produto e razão:

$$\begin{aligned} \sigma_K^2 &= \left(\frac{v^2}{2}\right)^2 \sigma_m^2 + (mv)^2 \sigma_v^2 = \left(\frac{mv^2}{2m}\right)^2 \sigma_m^2 + \left(\frac{2mv^2}{2v}\right)^2 \sigma_v^2 = \left(\frac{mv^2}{2}\right)^2 \left[\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(2\frac{\sigma_v}{v}\right)^2\right] \\ \sigma_K^2 &= K^2 \left[\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(2\frac{\sigma_v}{v}\right)^2\right] \Rightarrow \sigma_K = K \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(2\frac{\sigma_v}{v}\right)^2} \quad (4.1.2) \end{aligned}$$

O caso geral relacionado a este exemplo, e que pode ser deduzido por esse procedimento (faça este exercício), é o desvio-padrão do *produto de potências*.

Seja uma função  $f = f(a, b, c)$  tal que  $f(a, b, c) = a^m b^n c^p$ , com  $m, n$  e  $p$  inteiros. Assim, a incerteza propagada da função  $f$  é:

$$\sigma_f = f \sqrt{\left(m \frac{\sigma_a}{a}\right)^2 + \left(n \frac{\sigma_b}{b}\right)^2 + \left(p \frac{\sigma_c}{c}\right)^2} \quad (4.1.3)$$

Ou seja, os expoentes se tornam multiplicadores das incertezas de suas respectivas variáveis. Na situação especial em que a incerteza da massa puder ser desconsiderada, teremos  $\sigma_m \approx 0$  e, de (4.1.2), teremos:

$$\sigma_K = 2K \frac{\sigma_v}{v} \quad (4.1.4)$$

A grandeza  $v$  provém de uma razão entre variações e, na situação em que  $\Delta x \approx 0$ , temos que  $v \approx 0$  e a expressão 4.1.4 não pode ser aplicada. No entanto,  $v$  consta no denominador da expressão devido a uma transformação algébrica feita ao longo da dedução. Voltando ao começo da dedução de (4.4.2), e lembrando que  $\sigma_m \approx 0$ , temos:

$$\sigma_K^2 = \left(\frac{v^2}{2}\right)^2 \sigma_m^2 + (mv)^2 \sigma_v^2 \approx (mv)^2 \sigma_v^2$$

Utilizemos a ideia descrita na seção 2, no tópico *Uma Interpretação Importante*. Segundo a equação (2.4), como a velocidade tende a zero,  $\sigma_v^2 \cong v^2$ . Logo,

$$\sigma_K^2 \approx (mv)^2 \sigma_v^2 = m^2 v^2 \sigma_v^2 \approx m^2 \sigma_v^4 \Rightarrow \sigma_K \approx m \sigma_v^2 \quad (4.1.5)$$

Estas fórmulas de incertezas são empregadas com frequência nos cálculos de **energia cinética** dos corpos, por exemplo, no experimento de Energia.

## 4.2 Energia Potencial Elástica

A energia potencial elástica  $U$  de um corpo na mecânica clássica pode ser calculada a partir de sua distância da posição de equilíbrio  $\Delta x$  e da constante elástica  $k$  da mola:

$$U(\Delta x, k) = \frac{k(\Delta x)^2}{2}$$

Pela expressão (2.2) de propagação de incertezas, as derivadas parciais da energia potencial em relação à constante elástica e à elongação são  $\frac{\partial U}{\partial k} = \frac{(\Delta x)^2}{2}$  e  $\frac{\partial U}{\partial(\Delta x)} = \frac{2k(\Delta x)}{2} = k(\Delta x)$ . Após as devidas simplificações, obtemos:

$$\sigma_U^2 = \left(\frac{(\Delta x)^2}{2}\right)^2 \sigma_k^2 + (k(\Delta x))^2 \sigma_{\Delta x}^2 \quad (4.2.1)$$

Esta expressão pode ser modificada algebricamente de modo a obter a aparência da fórmula geral para funções do tipo produto e razão:

$$\begin{aligned} \sigma_U^2 &= \left(\frac{(\Delta x)^2}{2}\right)^2 \sigma_k^2 + (k(\Delta x))^2 \sigma_{\Delta x}^2 = \left(\frac{k(\Delta x)^2}{2k}\right)^2 \sigma_k^2 + \left(\frac{2k(\Delta x)^2}{2(\Delta x)}\right)^2 \sigma_{\Delta x}^2 \\ \sigma_U^2 &= \left(\frac{k(\Delta x)^2}{2}\right)^2 \left[ \left(\frac{\sigma_k}{k}\right)^2 + \left(2 \frac{\sigma_{\Delta x}}{\Delta x}\right)^2 \right] \end{aligned}$$

$$\sigma_U^2 = U^2 \left[ \left( \frac{\sigma_k}{k} \right)^2 + \left( \frac{2\sigma_{\Delta x}}{\Delta x} \right)^2 \right] \Rightarrow \sigma_U = U \sqrt{\left( \frac{\sigma_k}{k} \right)^2 + \left( 2 \frac{\sigma_{\Delta x}}{\Delta x} \right)^2} = U \sqrt{\left( \frac{\sigma_k}{k} \right)^2 + \left( 2\sqrt{2} \frac{\sigma_x}{\Delta x} \right)^2} \quad (4.2.2)$$

Na situação especial em que a incerteza da constante elástica puder ser desconsiderada, teremos  $\sigma_k \approx 0$  e, de (4.8), vem que:

$$\sigma_U = 2\sqrt{2}U \frac{\sigma_x}{\Delta x} \quad (4.2.3)$$

Se, para certo instante de tempo,  $\Delta x \approx 0$ , teremos uma indeterminação em (4.2.3). Entretanto,  $\Delta x$  consta no denominador da expressão devido a uma transformação algébrica feita ao longo da dedução. Voltando ao começo da dedução de (4.2.2), e lembrando que  $\sigma_k \approx 0$ , temos:

$$\sigma_U^2 = \left( \frac{(\Delta x)^2}{2} \right)^2 \sigma_k^2 + (k(\Delta x))^2 \sigma_{\Delta x}^2 \approx (k(\Delta x))^2 \sigma_{\Delta x}^2$$

Utilizemos novamente a ideia descrita na seção 2, no tópico *Uma Interpretação Importante*. Segundo a equação (2.4), como o deslocamento tende a zero,  $\sigma_{\Delta x}^2 \cong \overline{(\Delta x)^2}$ . Logo,

$$\sigma_U^2 \approx (k(\Delta x))^2 \sigma_{\Delta x}^2 = k^2 (\Delta x)^2 \sigma_{\Delta x}^2 \approx k^2 \sigma_{\Delta x}^4 \Rightarrow \sigma_U \approx k \sigma_{\Delta x}^2 \Rightarrow \sigma_U \approx \sqrt{2} k \sigma_{\Delta x}^2 \quad (4.2.4)$$

Estas fórmulas de incertezas são empregadas com frequência nos cálculos de **energia potencial elástica** dos corpos, por exemplo, no experimento de Energia.

### 4.3 Energia Mecânica

A energia mecânica  $E$  de um corpo na mecânica clássica pode ser calculada a partir da soma de suas energias cinética e potencial:

$$E(K, U) = K + U$$

Aplicando a expressão de propagação de incertezas para a energia mecânica, teremos:

$$\sigma_E^2 = \left( \frac{\partial E}{\partial K} \right)^2 \sigma_K^2 + \left( \frac{\partial E}{\partial U} \right)^2 \sigma_U^2 \quad (4.3.1)$$

Calculando as derivadas parciais, teremos  $\frac{\partial E}{\partial K} = \frac{\partial E}{\partial U} = 1$ . Logo, substituindo em (4.3.1) e realizando as devidas simplificações, teremos:

$$\sigma_E^2 = \sigma_K^2 + \sigma_U^2 \Rightarrow \sigma_E = \sqrt{\sigma_K^2 + \sigma_U^2} \quad (4.3.2)$$

Lembre-se que o resultado obtido vale para o caso geral. Este valor de incerteza é utilizado nos cálculos de **energia mecânica** dos corpos, por exemplo, no experimento de Energia.

#### 4.4 Velocidade angular na forma $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$

Pela fórmula de propagação de incertezas, tomando  $\Delta\varphi=A$  e  $\Delta t=B$ , teremos:

$$\omega(\Delta\varphi, \Delta t) = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{A}{B} \Rightarrow \sigma_{\omega}^2 = \left(\frac{\partial\omega}{\partial A}\right)^2 \sigma_A^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial B}\right)^2 \sigma_B^2 \quad (4.3.3)$$

Calculando as derivadas parciais,  $\frac{\partial\omega}{\partial A} = \frac{1}{B}$  e  $\frac{\partial\omega}{\partial B} = -\frac{A}{B^2}$ . Logo,

$$\sigma_{\omega}^2 = \left(\frac{1}{B}\right)^2 \sigma_A^2 + \left(\frac{-A}{B^2}\right)^2 \sigma_B^2 = \left(\frac{1}{\Delta t}\right)^2 \sigma_{\Delta\varphi}^2 + \left(\frac{-(\Delta\varphi)}{(\Delta t)^2}\right)^2 \sigma_{\Delta t}^2 = \frac{1}{(\Delta t)^2} \left[ \sigma_{\Delta\varphi}^2 + \frac{(\Delta\varphi)^2 \sigma_{\Delta t}^2}{(\Delta t)^2} \right]$$

Substituindo (3.1.4) e a análoga de (3.1.3) para posição angular:

$$\sigma_{\omega}^2 = \frac{1}{(\Delta t)^2} \left[ 2\sigma_{\varphi}^2 + 2\frac{(\Delta\varphi)^2 \sigma_t^2}{(\Delta t)^2} \right] = \frac{2}{(\Delta t)^2} [\sigma_{\varphi}^2 + \omega^2 \sigma_t^2] \Rightarrow \sigma_{\omega} = \frac{\sqrt{2}}{\Delta t} \sqrt{\sigma_{\varphi}^2 + \omega^2 \sigma_t^2} \quad (4.3.4)$$

Na situação especial em que a incerteza do tempo puder ser desconsiderada, teremos  $\sigma_t \approx 0$  e, de (4.3.4), vem que:

$$\sigma_{\omega} = \frac{\sqrt{2}}{\Delta t} \sigma_{\varphi} \quad (4.3.5)$$

#### 4.5 Velocidade angular na forma $\omega = \frac{v}{r}$

Pela fórmula de propagação de incertezas, teremos:

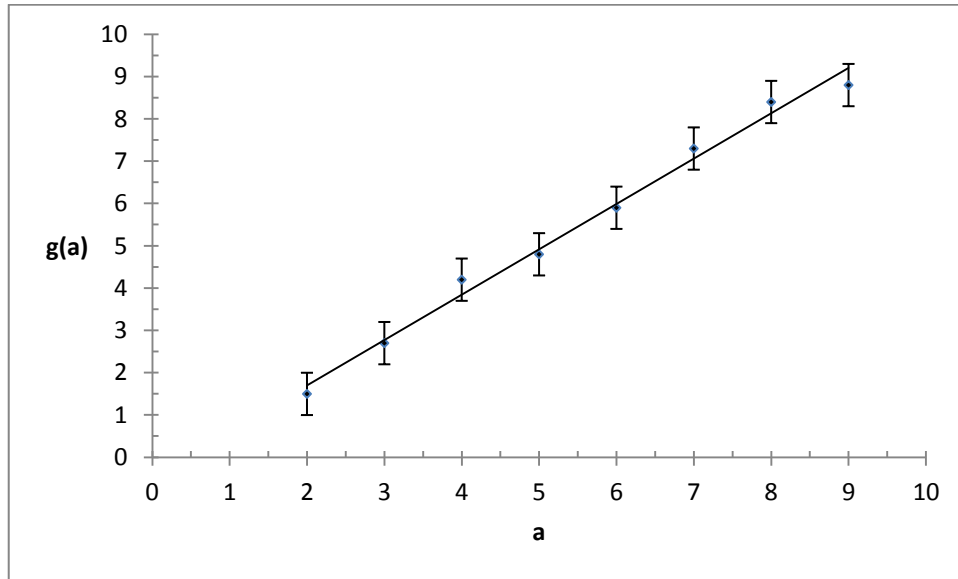
$$\omega(v, r) = \frac{v}{r} \Rightarrow \sigma_{\omega}^2 = \left(\frac{\partial\omega}{\partial v}\right)^2 \sigma_v^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)^2 \sigma_r^2 \quad (4.5.1)$$

Calculando as derivadas parciais,  $\frac{\partial\omega}{\partial v} = \frac{1}{r}$  e  $\frac{\partial\omega}{\partial r} = -\frac{v}{r^2}$ . Logo,

$$\sigma_{\omega}^2 = \left(\frac{1}{r}\right)^2 \sigma_v^2 + \left(-\frac{v}{r^2}\right)^2 \sigma_r^2 = \frac{1}{r^2} [\sigma_v^2 + \omega^2 \sigma_r^2] \Rightarrow \sigma_{\omega} = \frac{1}{r} \sqrt{\sigma_v^2 + \omega^2 \sigma_r^2} \quad (4.5.2)$$

### 4.6 Reta Média

Sejam  $g$  uma função e  $a$  uma variável, tais que  $g = g(a)$ . Considere que somos capazes de efetuar medidas dos valores de  $g$  variando o parâmetro  $a$ . Considere ainda que nos seja interessante conhecer não o comportamento da função  $g$ , mas sim, o de sua função derivada:  $f = g'(a)$ .



Para o gráfico acima, consideremos  $T$  como o intervalo compreendido pela variável  $a$ , para  $N$  pontos experimentais. A inclinação da reta média, isto é, a derivada da função  $g$ , representa a grandeza de interesse  $f$ . Além disso, a incerteza desta inclinação nos dá a própria incerteza em  $f$ . Podemos calcular esta incerteza na inclinação reta utilizando a seguinte expressão (que não demonstraremos pelo fato de a mesma não ser o foco do presente roteiro):

$$\sigma_f = \frac{\sigma_g}{T} \sqrt{\frac{12}{N}} \quad (4.6.1)$$

Podemos interpretar este resultado ao pensar, por exemplo, em  $a$  como sendo o tempo e  $g(a)$  um deslocamento:

$$\sigma_v = \frac{\sigma_x}{T} \sqrt{\frac{12}{N}} \quad (4.6.2)$$

Por definição, a velocidade média é a razão entre as variações correspondentes na posição e no tempo:

$$v(\Delta x, \Delta t) = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Se analisarmos o resultado ao qual chegamos em (3.3.2),  $\sigma_v = \frac{\sqrt{2}}{\Delta t} \sigma_x$ , ao compararmos o mesmo com o resultado de (4.6.2), perceberemos que são muito parecidas. Entretanto, existe um termo de diferença, devido ao fato de a análise estar sendo feita sobre intervalos de tempo e de espaço. Em outras palavras, o termo é devido à influência destes intervalos.

## 5. Outras aplicações

### 5.1 Torque

Aplicando a expressão de propagação de incerteza, teremos:

$$\tau(m, g, d) = mgd \Rightarrow \sigma_\tau^2 = \left(\frac{\partial \tau}{\partial m}\right)^2 \sigma_m^2 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial g}\right)^2 \sigma_g^2 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial d}\right)^2 \sigma_d^2 \quad (5.1.1)$$

Calculando as derivadas parciais,  $\frac{\partial \tau}{\partial m} = gd$ ,  $\frac{\partial \tau}{\partial g} = md$  e  $\frac{\partial \tau}{\partial d} = mg$ . Logo,

$$\sigma_\tau^2 = (gd)^2 \sigma_m^2 + (md)^2 \sigma_g^2 + (mg)^2 \sigma_d^2 = \left(\frac{mgd}{m}\right)^2 \sigma_m^2 + \left(\frac{mgd}{g}\right)^2 \sigma_g^2 + \left(\frac{mgd}{d}\right)^2 \sigma_d^2$$

$$\sigma_\tau^2 = (mgd)^2 \left[ \left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_g}{g}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_d}{d}\right)^2 \right] \Rightarrow \sigma_\tau = |\tau| \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_g}{g}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_d}{d}\right)^2}$$

Desprezando a incerteza da aceleração da gravidade, quando a consideramos uma constante conhecida, isto é,  $\sigma_g \approx 0$ , teremos:

$$\sigma_\tau = |\tau| \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_d}{d}\right)^2} \quad (5.1.2)$$

### 5.2 Momento de inércia de um cilindro uniforme no eixo longitudinal

Aplicando a expressão de propagação de incerteza, teremos:

$$I(m, r) = \frac{mr^2}{2} \Rightarrow \sigma_I^2 = \left(\frac{\partial I}{\partial m}\right)^2 \sigma_m^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial r}\right)^2 \sigma_r^2 \quad (5.2.1)$$

Calculando as derivadas parciais,  $\frac{\partial I}{\partial m} = \frac{r^2}{2}$  e  $\frac{\partial I}{\partial r} = \frac{2mr}{2} = mr$ . Logo,

$$\sigma_I^2 = \left(\frac{\partial I}{\partial m}\right)^2 \sigma_m^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial r}\right)^2 \sigma_r^2 = \left(\frac{mr^2}{2m}\right)^2 \sigma_m^2 + \left(\frac{2mr^2}{2r}\right)^2 \sigma_r^2 = \left(\frac{mr^2}{2}\right)^2 \left[ \left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(2\frac{\sigma_r}{r}\right)^2 \right]$$

$$\sigma_I = I \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(2\frac{\sigma_r}{r}\right)^2} \quad (5.2.2)$$

### 5.3 Aceleração angular na forma $\alpha = \frac{\tau}{I}$

Pela 2ª Lei de Newton para a rotação, e pela fórmula de propagação de incertezas, teremos:

$$\alpha(\tau, I) = \frac{\tau}{I} \Rightarrow \sigma_{\alpha}^2 = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \tau}\right)^2 \sigma_{\tau}^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial I}\right)^2 \sigma_I^2 \quad (5.3.1)$$

Calculando as derivadas parciais,  $\frac{\partial \alpha}{\partial \tau} = \frac{1}{I}$  e  $\frac{\partial \alpha}{\partial I} = -\frac{\tau}{I^2}$ . Logo,

$$\sigma_{\alpha}^2 = \left(\frac{1}{I}\right)^2 \sigma_{\tau}^2 + \left(\frac{-\tau}{I^2}\right)^2 \sigma_I^2 = \frac{\tau^2}{I^2} \left[\frac{\sigma_{\tau}^2}{\tau^2} + \frac{\sigma_I^2}{I^2}\right] \Rightarrow \sigma_{\alpha} = |\alpha| \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\tau}}{\tau}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_I}{I}\right)^2} \quad (5.3.2)$$



## 6. Bibliografia

- HELENE, Otaviano Augusto Marcondes, VANIN, Vito Roberto. *Tratamento Estatístico de Dados em Física Experimental*. Edgard Blücher, 2ª edição, 1991.
- VUOLO, José Henrique. *Fundamentos da Teoria de Erros*. Edgard Blücher, 2ª edição, 1996.
- Bureau Internacional de Pesos e Medidas. *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (GUM)*. 2004