

Exemplo de Cálculo Numérico da Derivada de uma Função Análise de Experimentos Virtuais

Um problema frequente de análise de dados é calcular a derivada de uma função que não tenha expressão analítica, isto é, uma função cujo valor possa ser determinado para diferentes valores da variável independente, mas não por meio de uma fórmula matemática concisa. Neste experimento, a determinação da velocidade recai nesse problema, uma vez que temos apenas algumas fotos do carrinho, de modo que não conseguimos saber a posição a cada instante, mas apenas nos instantes marcados nas fotos disponíveis. Para explicar o método de solução, porém, vamos exemplificar com a derivada de uma função com fórmula analítica conhecida, de modo que você possa comparar as várias possibilidades de solução e entender a escolha realizada.

Para tornar o exemplo parecido com nosso problema, fizemos um gráfico de posição por tempo, de modo que a inclinação corresponde à velocidade e podemos nos referir aos valores numéricos dos eixos. A figura 1 mostra o gráfico dessa função do tempo t , onde nas ordenadas lemos a posição $x = x(t)$ em função do tempo, t , da abscissa. Nessa figura, também está marcado o ponto $t' = 2$ s, no qual queremos conhecer o valor da derivada, conhecendo apenas os valores da função nos instantes $t = 1$ s, $t = 2$ s e $t = 3$ s; esses valores conhecidos estão na Tabela 1. Na figura 1, também desenhamos a tangente ao ponto $t = 2$ s, cuja inclinação é a velocidade que estamos procurando, mas não podemos calcular porque não dispomos da fórmula analítica da função.

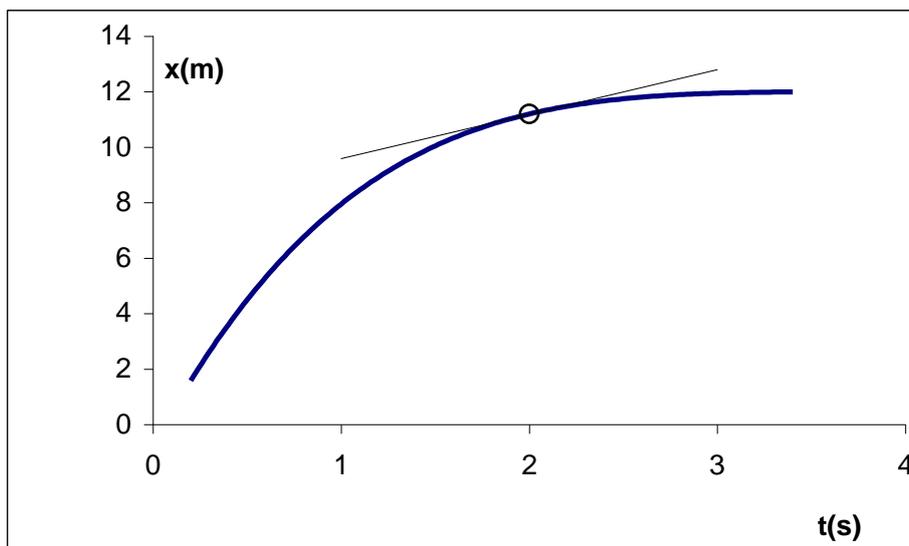


Figura 1. Gráfico da posição de um corpo em função do tempo. O ponto em $t = 2$ s está marcado com um pequeno círculo, destacando o instante no qual se deseja conhecer a derivada usando *apenas* os valores da tabela 1; a inclinação da reta tangente desenhada é a velocidade que buscamos, mas ela não pode ser deduzida sem usar dados não acessíveis ao experimentador – lembre-se, o gráfico que você está vendo só foi desenhado para ajudá-lo a entender a solução, ele não pode ser observado experimentalmente.

t (s)	x (m)
1	7,95
2	11,20
3	11,95

Tabela 1. Valores conhecidos de posição por tempo, que podem ser usados para o cálculo da derivada da função em $t = 2$ s.

As Figuras 2 e 3 ilustram as primeiras tentativas, que são feitas usando a definição de derivada:

$$v(t') = \lim_{t \rightarrow t'} \frac{x - x'}{t - t'}$$

onde x é a posição em t e x' a posição em t'

Como só temos dois pontos, não podemos calcular esse limite, mas podemos aproximar:

$$v(t') \approx \frac{x - x'}{t - t'} \quad (1)$$

Essa fórmula dá a inclinação da reta que passa pelos pontos (t, x) e (t', x') . Para avaliar a qualidade dessa aproximação, desenhamos as retas que passam pelos pontos da Tabela 1, superpostas ao gráfico de posição em função do tempo: na Figura 2, a reta desenhada passa pelos pontos $(t' = 2 \text{ s}, x' = 11,2 \text{ m})$ e $(t = 3 \text{ s}, x = 11,95 \text{ m})$ e na Figura 3, pelos pontos $(t' = 2 \text{ s}, x' = 11,2 \text{ m})$ e $(t = 1 \text{ s}, x = 7,95 \text{ m})$. Note que, no primeiro caso, a velocidade é nitidamente menor que a velocidade correta, enquanto que no segundo ela é nitidamente maior.

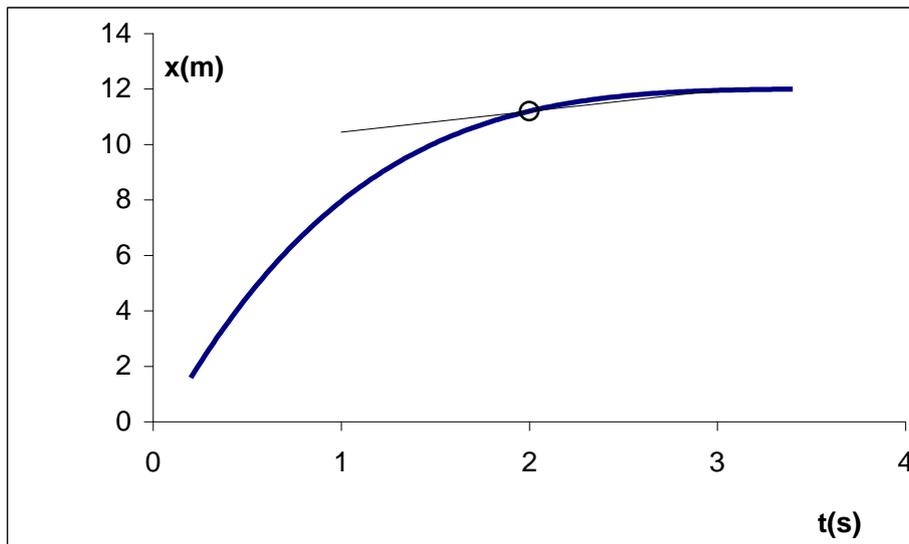


Figura 2. Mesmo que a figura 1, mais o gráfico da reta que passa pelas posições em $t = 2 \text{ s}$ e $t = 3 \text{ s}$. A inclinação dessa reta é bem menor que a velocidade real em $t = 2 \text{ s}$.

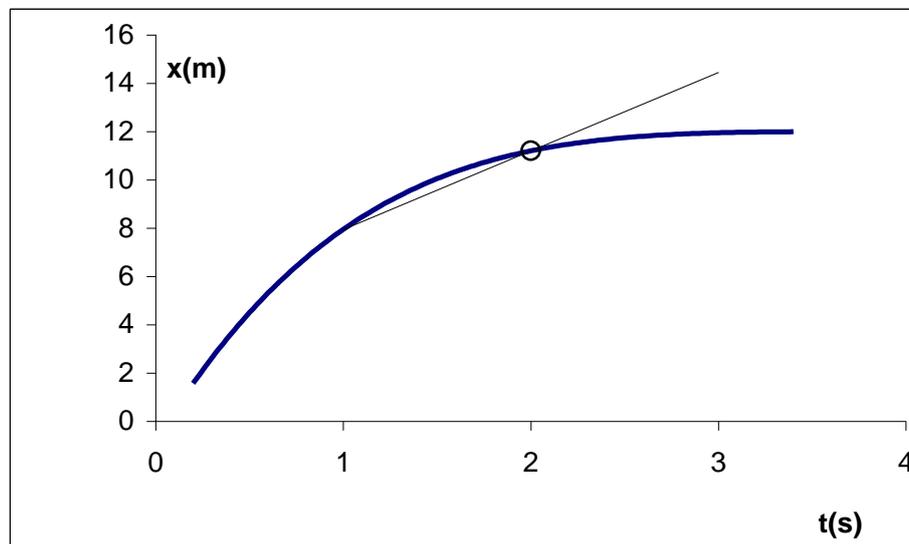


Figura 3. Mesmo que a figura 1, mais o gráfico da reta que passa pelas posições em $t = 1 \text{ s}$ e $t = 2 \text{ s}$. A inclinação dessa reta é bem maior que a velocidade real em $t = 2 \text{ s}$.

Se uma aproximação é maior que o valor correto e a outra é menor, então a média deve ser uma aproximação melhor. Essa média pode ser calculada simplesmente como

$$v(t') \approx \frac{x_{>} - x_{<}}{t_{>} - t_{<}} \quad (2)$$

Em que $x_{>}$ é a posição em $t_{>}$ e $x_{<}$ é a posição em $t_{<}$; no caso, $t_{<} = 1$ s e $t_{>} = 3$ s. O resultado obtido está representado na figura 4 abaixo.

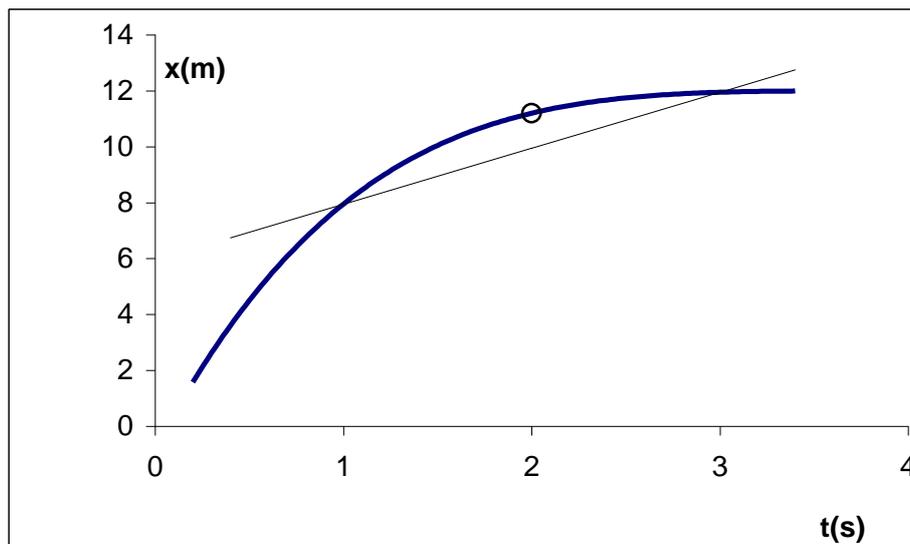


Figura 4. Mesmo que a Figura 1, mais o gráfico da reta que passa pelas posições em $t = 1$ s e $t = 3$ s.

Da Figura 4, percebe-se que a inclinação da reta dada pela fórmula (2) é bastante parecida com a da tangente, de modo que essa é a aproximação que usaremos. A princípio, é estranho que a derivada em $t = 2$ s só dependa dos valores da função antes e depois e não do valor no próprio instante, mas a comparação das Figuras 2, 3 e 4 sugere que é mesmo melhor usar um ponto antes e outro depois do instante de interesse. Esse resultado qualitativo tem, porém, o apoio importante do Teorema do Valor Médio, que diz que existe um instante entre os dois tempos usados na fórmula (2) em que a derivada da função é idêntica ao valor dado pela fórmula. Assim, em princípio, poderíamos calcular a derivada em t' com tanta precisão quanta necessária, bastando para isso aproximarmos suficientemente os instantes $t_{>}$ e $t_{<}$, mostrando a consistência da estimativa.

Enfim, é este o truque que usaremos e que é recomendado sempre que precisarmos calcular numericamente a derivada de uma função qualquer.